

יחידה שנייה

גיאומטריה אנליטית

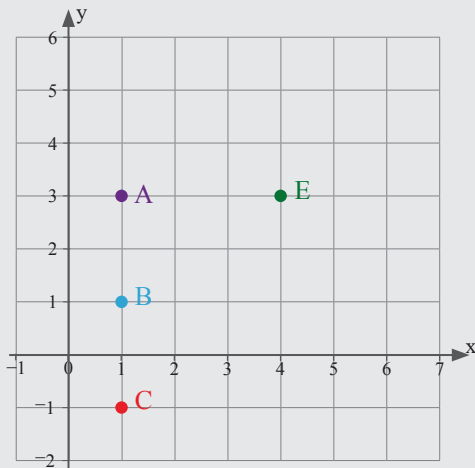
ביחידה זו נלמד על תחום במתמטיקה, המשלב אלגברה וגיאומטריה, ונחקר אובייקטים גיאומטריים ותכונותיהם. בגיאומטריה אנליטית מתקבלות תכונות גיאומטריות על-ידי חישובים אלגבריים, המבוססים על מיקום של האובייקטים במערכת צירים.

ביחידה זו ייעשה שימוש גם בנושאים הבאים:

- שיעורי נקודות במערכת צירים – ראו **נספח ב'**.
- משוואת הקו הישר – ראו **נספח ג'**.
- תכונות משולשים, מרובעים וצורות מורכבות (כולל חישוב שטח והיקף) – ראו **נספח ד'**.
- משפט פיתגורס.
- פתרון משוואות ומערכות משוואות ממעלה ראשונה.

הידעתם?

רְנֵה דְקָארְט (1596-1650) היה פילוסוף ומתמטיקאי צרפתי, ונחשב לאחד ההוגים החשובים והמשפיעים ביותר. דקארט עסק בעיקר ביכולת להגיע לידיעה ודאית וביחס בין גוף לנפש. המשפט המפורסם שטבע "**אני חושב, משמע אני קיים**" מבטא את הרעיון שאֵל מול החושים המתעתעים, החשיבה של האדם מעידה על קיומו. אף על פי שהיה מוכר בעיקר עקב הגותו פורצת הגבולות בפילוסופיה, הוא השיג פרסום רחב כממציא של **מערכת הצירים הקרטזית** ("קרטזית" מלשון "קרטזיוס" - שמו הלטיני של דקארט, שהוא רְנֵה דְקָארְט). באמצעות פיתוח מערכת הצירים הקרטזית הניח דקארט את היסודות לגיאומטריה האנליטית, ויש הרואים בה את תחילתה של המתמטיקה המודרנית.



במערכת הצירים שלפניכם מסומנות 4 נקודות.

א. מצאו את שיעוריהן של 4 הנקודות: A, B, C ו-E.

ב. (1) מה משותף לנקודות A, B ו-C?

(2) דרך הנקודות A, B ו-C סרטטו ישר.

מה תוכלו לומר על ישר זה ביחס לציר ה-y?

ג. (1) מה משותף לנקודות A ו-E?

(2) דרך הנקודות A ו-E סרטטו ישר.

מה תוכלו לומר על ישר זה ביחס לציר ה-x?

ד. מה תוכלו לומר על מיקום הנקודה B ביחס לנקודות A ו-C?

התשובה למשימת הפתיחה – בעמ' 174.

קטעים במערכת צירים

בפרק זה נתמקד במציאת מרחקים בין שתי נקודות, קביעת הצורה הגיאומטרית באמצעות מציאת המרחקים ובמציאת אמצע הקטע בין שתי נקודות. השאלות כוללות מציאת ההיקף והשטח של הצורה הגיאומטרית. חזרה על מערכת צירים - ראו **נספח ב'**.

מה נלמד?

✓ מרחק בין שתי נקודות.

✓ אמצע קטע.

✓ משולשים.

✓ מרובעים.

התשובות לתרגילים בפרק זה – בעמ' 174-176.

א. מרחק בין שתי נקודות

בסעיף זה נמצא את המרחק בין שתי נקודות נתונות (אורך הקטע המחבר אותן). נחזור על מציאת אורך קטע המקביל לציר (או מתלכד אתו) – נושא שנלמד בחטיבת הביניים. נרחיב מציאת אורך קטע במקרה כזה!

הסבר ודוגמה פתורה – אורך קטע המקביל לציר (או מתלכד איתו)

נתבונן בנקודות המסומנות במערכות הצירים הבאות.

נקודות A, P ו-B:

שיעור ה-y של שלוש הנקודות הוא 4.

מכאן ששלושתן נמצאות במרחק 4 יח' מציר ה-x.

הקטע AB, שעובר דרך 3 הנקודות, מקביל לציר ה-x, כי המרחק בין

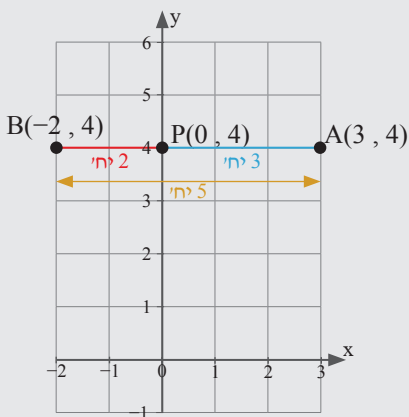
הקטע AB לציר ה-x הוא קבוע.

המרחק בין A ל-P הוא 3 יח', והמרחק בין P ל-B הוא 2 יח',

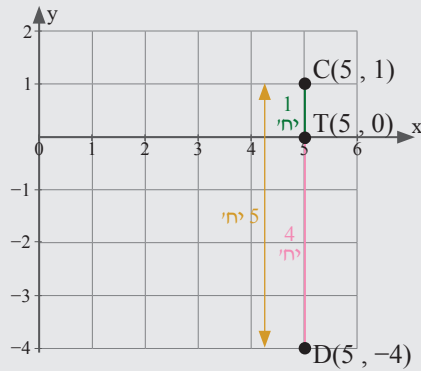
כלומר המרחק בין A ל-B הוא 5 יח' ($2 + 3 = 5$).

נוכל למצוא את אורך הקטע AB גם באופן הבא:

$$x_A - x_B = 3 - (-2) = 5 \text{ יח'}$$



נקודות C, T ו-D:



שיעור ה-x של שלוש הנקודות הוא 5.

מכאן ששלושתן נמצאות במרחק 5 יח' מציר ה-y.

הקטע CD, שעובר דרך 3 הנקודות, מקביל לציר ה-y,

כי המרחק בין הקטע CD לציר ה-y הוא קבוע.

המרחק בין C ל-T הוא 1 יח', והמרחק בין T ל-D הוא 4 יח',

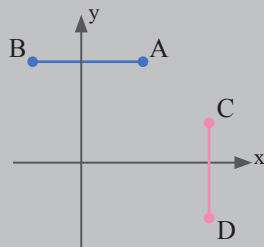
כלומר המרחק בין C ל-D הוא 5 יח' ($1 + 4 = 5$).

נוכל למצוא את אורך הקטע CD גם באופן הבא:

$$y_C - y_D = 1 - (-4) = 5 \text{ יח'}$$

נסכם!

- אם לשתי נקודות יש אותו שיעור x, אזי הישר העובר דרכן ניצב לציר ה-x, כלומר מקביל לציר ה-y או מתלכד אתו.
ולהפך: לנקודות, המונחות על ישר המקביל לציר ה-y (או על ציר ה-y), יש אותו שיעור x.
בסרטוט: נקודות C ו-D.
- אם לשתי נקודות יש אותו שיעור y, אזי הישר העובר דרכן ניצב לציר ה-y, כלומר מקביל לציר ה-x או מתלכד אתו.
ולהפך: לנקודות, המונחות על ישר המקביל לציר ה-x (או על ציר ה-x), יש אותו שיעור y.
בסרטוט: נקודות A ו-B.



אורך קטע הניצב לציר x או לציר y

✓ אורך הקטע AB, הניצב לציר y, הוא: $x_A - x_B$ (נקודה ימנית, B – נקודה שמאלית).

✓ אורך הקטע CD, הניצב לציר x, הוא: $y_C - y_D$ (נקודה עליונה, C – נקודה תחתונה).

דוגמה

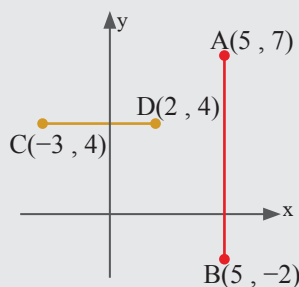
במערכת צירים נתונות הנקודות:

$A(5, 7)$, $B(5, -2)$, $C(-3, 4)$, $D(2, 4)$.

א. הסבירו מדוע הקטע AB מקביל לציר ה-y.

ב. הסבירו מדוע הקטע CD מקביל לציר ה-x.

ג. מצאו את אורכי הקטעים AB ו-CD.

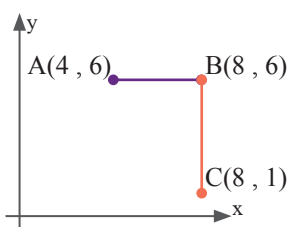


פתרון:

- א. לנקודות A ו-B יש אותו שיעור x : $x_A = x_B = 5$.
 שתי הנקודות נמצאות באותו המרחק מציר ה-y (5 יחידות).
 לכן הקטע AB מקביל לציר ה-y וניצב לציר ה-x.
- ב. לנקודות C ו-D יש אותו שיעור y : $y_C = y_D = 4$.
 שתי הנקודות נמצאות באותו המרחק מציר ה-x (4 יחידות).
 לכן הקטע CD מקביל לציר ה-x וניצב לציר ה-y.
- ג. נמצא את אורך הקטע AB : $y_A - y_B = 7 - (-2) = 9$
 נמצא את אורך הקטע CD : $x_D - x_C = 2 - (-3) = 5$
תשובה : אורך הקטע AB הוא 9 יחידות, ואורך הקטע CD הוא 5 יחידות.

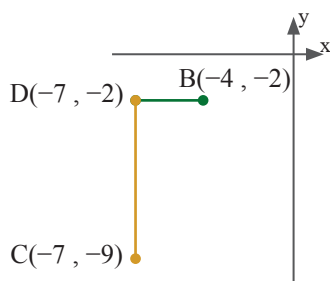
הערות:

- אורך קטע אינו יכול להיות מספר שלילי.
- יחידות המידה במערכת הצירים הן "יחידות" או "יחידות אורך" (בכתיב מקוצר: יח') ולא ס"מ, מטרים וכו'.
- בחישוב אורכי קטעים יש להקפיד לחסר את הערכים בסדר הנכון.
- חישוב אורכו של קטע, המונח על אחד הצירים, מתבצע בדיוק באותה הדרך.
- בהמשך הפרק נלמד למצוא את המרחק בין כל זוג נקודות שבמערכת הצירים.



1. במערכת הצירים שלפניכם נתונות 3 נקודות.

- א. הסבירו מדוע הקטע AB מקביל לציר ה-x.
- ב. הסבירו מדוע הקטע BC מקביל לציר ה-y.
- ג. מצאו את אורכי הקטעים AB ו-BC.



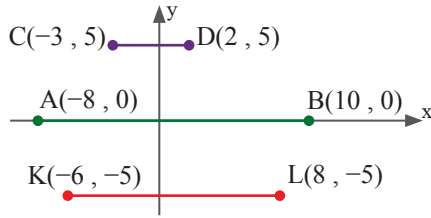
2. במערכת הצירים שלפניכם נתונות 3 נקודות.

- א. הסבירו מדוע הקטע DB מקביל לציר ה-x.
- ב. הסבירו מדוע הקטע DC מקביל לציר ה-y.
- ג. מצאו את אורכי הקטעים DC ו-DB.

3. במערכת הצירים שלפניכם נתונות 6 נקודות.

מצאו את אורכי הקטעים:

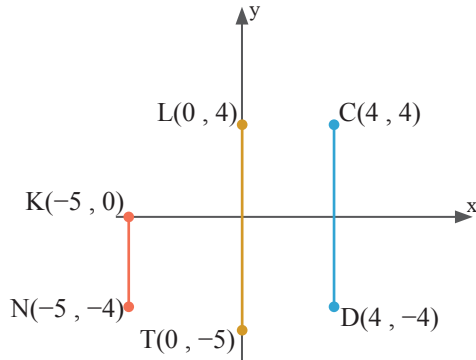
KL, AB, CD .



4. במערכת הצירים שלפניכם נתונות 6 נקודות.

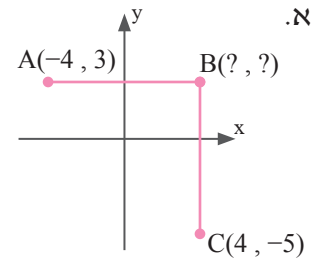
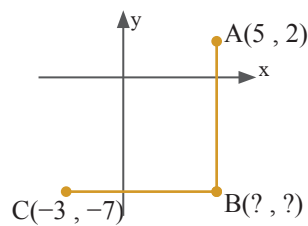
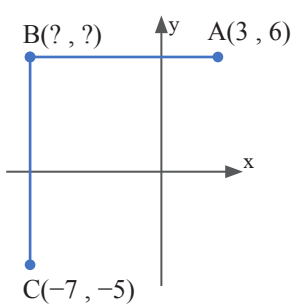
מצאו את אורכי הקטעים:

KN, LT, CD .



5. במערכות הצירים שלפניכם הקטעים מקבילים לצירים.

בכל אחד מהסעיפים מצאו את שיעורי הנקודה B ואת אורכי הקטעים AB ו-BC.



6. במערכת הצירים שלפניכם מסומנות 5 נקודות.

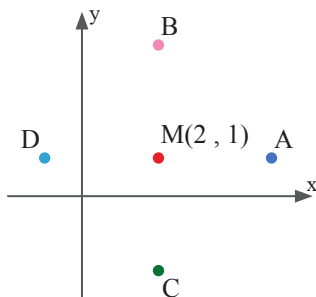
נתון: $M(2, 1)$.

הנקודות A, B, C ו-D נמצאות במרחק 3 יחידות מהנקודה M.

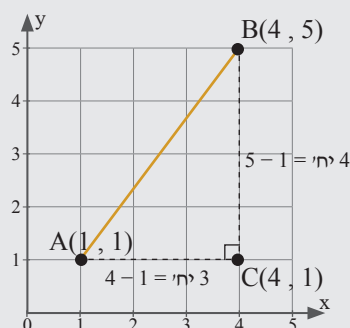
הקטע AD (העובר דרך הנקודה M) מקביל לציר ה-x.

הקטע BC (העובר דרך הנקודה M) מקביל לציר ה-y.

מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.



• מקרה פרטי



במערכת הצירים מסורטט הקטע AB.

נתון: $A(1, 1)$, $B(4, 5)$.

נסרטט קטעים מקבילים לצירים, היוצרים משולש ישר-זווית,

כאשר הקטע AB הוא היתר.

כדי למצוא את אורך הקטע AB ניעזר במשפט פיתגורס.

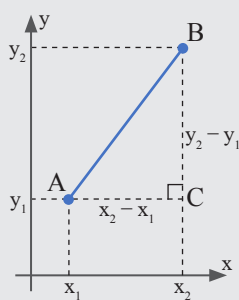
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 3^2 + 4^2$$

$$AB^2 = 9 + 16$$

$$AB^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$$

• מקרה כללי



במערכת צירים נתון קטע AB,

שקצותיו בנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$.

נמצא את אורך הקטע AB.

פתרון:

✓ מכל אחת מהנקודות A ו-B נסרטט קטעים המקבילים לצירים, כמתואר בסרטוט.

✓ מאחר שהמשולש $\triangle ABC$ הוא ישר-זווית ($\angle C = 90^\circ$), נשתמש במשפט פיתגורס: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

ידוע כי: $BC = y_2 - y_1$, $AC = x_2 - x_1$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$\Downarrow$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

נכליל:

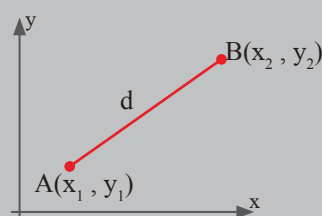
המרחק d בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

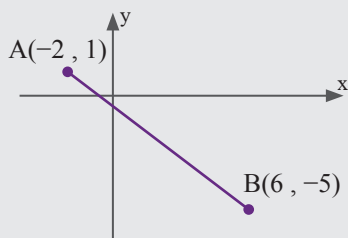
המרחק מסומן באות d, שהיא האות הראשונה במילה distance (באנגלית)

שפירושה מרחק.

הנוסחה מופיעה בנוסחאון 3 יח"ל.



דוגמה



במערכת הצירים נתון קטע AB.

נתון: A(-2, 1) ו-B(6, -5).

מהו אורך הקטע AB?

פתרון:

נסמן: A(-2, 1) , B(6, -5)

$\downarrow \quad \downarrow$ $\downarrow \quad \downarrow$
 $x_1 \quad y_1$ $x_2 \quad y_2$

הערה: ניתן לסמן את שיעורי הנקודה B גם ב-(x_1, y_1), ואת שיעורי הנקודה A ב-(x_2, y_2).

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

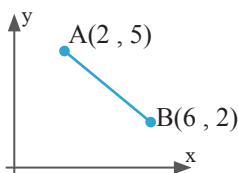
$$d_{AB} = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (-5 - 1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{64 + 36}$$

$$d_{AB} = \sqrt{100} \Rightarrow d_{AB} = 10 \text{ יחידות}$$

תשובה: אורך הקטע AB הוא 10 יחידות.



7. מצאו את המרחק בין שתי הנקודות שבמערכת הצירים.

8. בכל אחד מהסעיפים מצאו את המרחק בין הנקודות.

- א. (4, 5), (12, 20) ג. (6, 1), (12, 9) ה. (-3, 2), (-1, -4)
 ב. (10, 9), (7, 5) ד. (2, -7), (-3, 5) ו. (-2, -8), (-1, -5)

9. נתונה הנקודה A(6, 2). אילו מבין הנקודות הבאות נמצאות במרחק של 5 יחידות מהנקודה A?

- א. (3, 2) ב. (3, -2) ג. (2, -1) ד. (-2, -1)

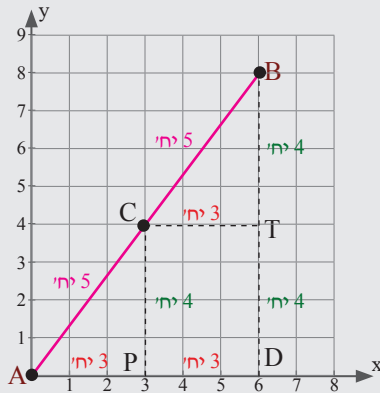
10. לפניכם זוגות של נקודות. באיזה סעיף הקטע המחבר את הנקודות הוא הארוך ביותר? מה אורכו?

- א. (0, -1), (0, -6) ב. (-1, -4), (6, -4) ג. (5, -2), (-3, -8)

ב. אמצע קטע

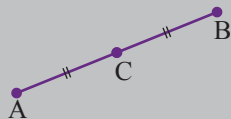
הסעיף זה נמצא את שיצורי נקודת אמצע הקטע על סמך שיצורי קצותיו. בנוסף, בהינתן שיצורי נקודת אמצע הקטע ושיצורי אחת מנקודות הקצה, נמצא את שיצורי נקודת הקצה השנייה.

הסבר ודוגמה פתורה – מציאת נקודת אמצע קטע



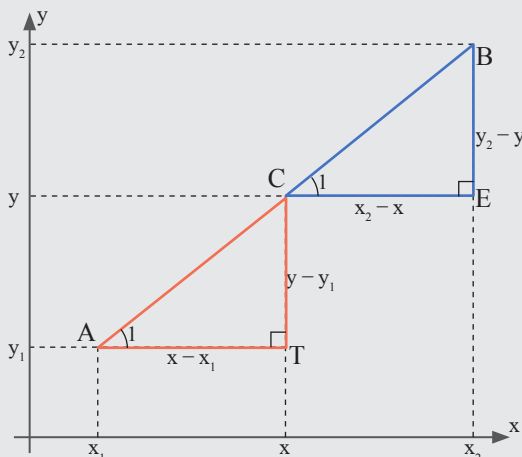
- נתבונן בקטעים המסומנים במערכת הצירים הבאה.
 - ✓ הקטע **AD** הוא קטע אופקי, ואורכו 6 יחידות.
 - הנקודה P היא אמצע הקטע **AD**, ולכן $AP = PD = 3$ יחידות.
 - ✓ הקטע **BD** הוא קטע אנכי שאורכו 8 יחידות.
 - הנקודה T היא אמצע הקטע **BD**, ולכן $BT = TD = 4$ יחידות.
 - ✓ הקטע **AB** הוא קטע אלכסוני, ואורכו 10 יחידות.
 - (ניתן לחשב את אורכו באמצעות משפט פיתגורס).
 - הנקודה C היא אמצע הקטע **AB**, ולכן $AC = CB = 5$ יחידות.
 - (ניתן לחשב את אורכי הקטעים AC ו-CB באמצעות משפט פיתגורס).
 - מתקיים: $y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+8}{2} = 4$ יחידות, $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$ יחידות.

נגדיר:



נקודה, המחלקת קטע לשני קטעים שווים, נקראת **נקודת האמצע של הקטע**:
 בסרטוט הנקודה C היא אמצע הקטע AB, ולכן $AC = CB$.
 כלומר המרחק בין נקודה A ל-C שווה למרחק בין נקודה B ל-C: $d_{AC} = d_{CB}$.

העשרה



- במערכת הצירים שלפניכם הנקודה $C(x, y)$ היא אמצע הקטע AB, כלומר $BC = CA$.
 נסמן את שיעורי קצות הקטע AB ב: $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$.
 נמצא את שיעורי הנקודה C.

פתרון :

- מכל אחת מהנקודות A, B ו-C נסרטט קטעים המקבילים לצירים, כמתואר בסרטוט. נרשום על גבי הסרטוט את אורכי הקטעים: AT, CT, CE ו-BE.
- נתבונן במשולשים ישרי-הזווית שנוצרו $\triangle BCE$ ו- $\triangle CAT$.
- ✓ $\angle C = \angle A$, ולכן $\angle C = \angle A$, כי הן זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים.
- ✓ $\angle E = \angle T = 90^\circ$, כי הזוויות נוצרו מחיתוך של ישרים המקבילים לצירים.
- לכן $\triangle BCE \sim \triangle CAT$ לפי משפט דמיון (ז.ז.), והיחס בין הצלעות המתאימות הוא: $\frac{BC}{CA} = \frac{CE}{AT} = \frac{BE}{CT}$.
- $BC = CA$, ולכן $\frac{BC}{CA} = 1$.

$$BE = y_2 - y, CE = x_2 - x, CT = y - y_1, AT = x - x_1$$

נציב ביחס בין הצלעות המתאימות, ונקבל:

$$1 = \frac{x_2 - x}{x - x_1} = \frac{y_2 - y}{y - y_1}$$

$$\begin{array}{lcl} 1 = \frac{x_2 - x}{x - x_1} & & 1 = \frac{y_2 - y}{y - y_1} \\ x - x_1 = x_2 - x & & y - y_1 = y_2 - y \\ 2x = x_1 + x_2 & & 2y = y_1 + y_2 \\ \boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} & & \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \end{array}$$

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

נכליל:

השיעורים של נקודת אמצע קטע, שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הם:

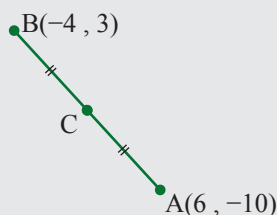
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

הנוסחה מופיעה בנוסחאון 3 יח"ל.

שימו לב!

- שיעור ה-x של נקודת אמצע הקטע הוא **ממוצע** שיעורי ה-x של הנקודות שבקצות הקטע,
- ושיעור ה-y של נקודת אמצע הקטע הוא **ממוצע** שיעורי ה-y של הנקודות שבקצות הקטע.
- לפי חוק החילוף בחיבור אין חשיבות לסדר המחברים.

דוגמה



הנקודה C היא אמצע הקטע AB.

נתון: $B(-4, 3)$, $A(6, -10)$.

מצאו את שיעורי הנקודה C.

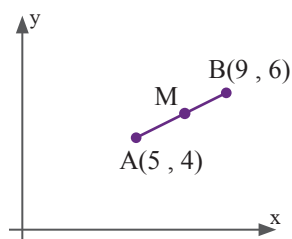
פתרון:

השיעורים של נקודת אמצע קטע, שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הם: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

נסמן את שיעורי נקודת האמצע של הקטע AB על-ידי $C(x, y)$:

$$x_c = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad , \quad y_c = \frac{3+(-10)}{2} = \frac{-7}{2} = -3.5$$

תשובה: נקודת האמצע של הקטע AB היא $C(1, -3.5)$.



11. הנקודה M היא אמצע הקטע AB.

נתון: $B(9, 6)$, $A(5, 4)$.

מצאו את שיעורי הנקודה M.

12. בכל אחד מהסעיפים מצאו את שיעורי נקודת האמצע של הקטע שקצותיו נתונים.

- | | | |
|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| א. $(5, 8)$, $(3, 6)$ | ג. $(-5, 0)$, $(0, 2)$ | ה. $(-3, -8)$, $(-5, 6)$ |
| ב. $(10, -5)$, $(-3, 8)$ | ד. $(-3, 2)$, $(3, 5)$ | ו. $(3, -5)$, $(-2, 4)$ |

13. הנקודות $P(4, -10)$ ו- $K(-8, 6)$ הן קצות הקטע PK.

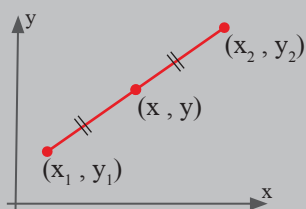
א. מצאו את אורך הקטע PK.

ב. הנקודה T היא אמצע הקטע PK. מצאו את שיעורי הנקודה T.

ג. הסבירו מדוע: $d_{PT} = d_{TK}$.

הסבר ודוגמה – מציאת נקודת הקצה של קטע על פי נקודת אמצע ונקודת הקצה האחרת

נכליל:



כאשר נתונים שיעורי נקודת קצהו האחד של הקטע (x_1, y_1) ושיעורי נקודת אמצע הקטע (x, y) , ויש למצוא את שיעורי נקודת קצהו השני של הקטע, נבצע את הפעולות הבאות:

א. נסמן את שיעורי נקודת הקצה הלא ידוע ב- (x_2, y_2) .

ב. נרכיב שתי משוואות באמצעות הנוסחה למציאת אמצע קטע.

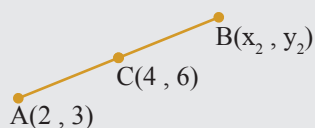
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

דוגמה

הנקודה C היא אמצע הקטע AB.

נתון: $C(4, 6)$, $A(2, 3)$.

מצאו את שיעורי נקודת הקצה B.



פתרון :

נסמן את שיעורי נקודת הקצה B ב- $B(x_2, y_2)$, ונציב :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$4 = \frac{2 + x_2}{2}$$

$$6 = \frac{3 + y_2}{2}$$

$$8 = 2 + x_2$$

$$12 = 3 + y_2$$

$$\boxed{x_2 = 6}$$

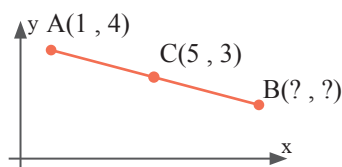
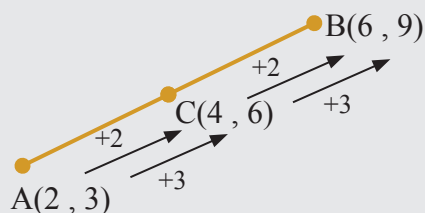
$$\boxed{y_2 = 9}$$

שימו לב!

אם נקודה C היא אמצע הקטע AB, ואם מ-A ל-C שיעור ה-x גדל ב-2 יח', אזי גם במעבר מ-C ל-B שיעור ה-x גדל ב-2 יח'.

באופן דומה אם מ-A ל-C שיעור ה-y גדל ב-3 יח', אזי גם במעבר מ-C ל-B שיעור ה-y גדל ב-3 יח'.

תשובה : שיעורי הנקודה B הם (6, 9).



14. הנקודה C היא אמצע הקטע AB.

נתון: $A(1, 4)$, $C(5, 3)$.

מצאו את שיעורי נקודת הקצה B.

15. בכל אחד מהסעיפים הנקודה C היא אמצע הקטע AB. נתונים שיעורי הנקודות A ו-C.

מצאו את שיעורי נקודת הקצה B.

א. $A(2, 3)$, $C(4, 6)$ ג. $A(-5, 4)$, $C(0, 3)$ ה. $A(0, 7)$, $C(5, -3)$

ב. $A(1, 5)$, $C(3, 3)$ ד. $A(-6, -4)$, $C(-3, -1)$ ו. $A(2, -6)$, $C(1, -8)$

16. הנקודה M(3, -2) היא אמצע הקטע TK.

הנקודה T נמצאת על ציר ה-x. הנקודה K נמצאת על ציר ה-y.

א. מצאו את שיעורי הנקודות T ו-K.

ב. מצאו את אורך הקטע TK.

17. הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-y, במרחק 8 יחידות מראשית הצירים.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A, וסמנו אותה במערכת צירים.

הנקודה C נמצאת על החלק השלילי של ציר ה-x, במרחק של 4 יחידות מראשית הצירים.

ב. רשמו את שיעורי הנקודה C, וסמנו אותה במערכת הצירים.

ג. מצאו את נקודת האמצע של הקטע AC.

הנקודה (2, 4) היא אמצע הקטע AB.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ה. מצאו את אורכי הקטעים AB ו-AC.

ג. משולשים

בסעיף זה נמצא היקפי צורות חשופים של אורכי קטעים. בנוסף נזהה את משולש הוא
עולה-שקיים או ישר-זווית על פי אורכי הצלעותיו, ונמצא את $\sin$.

תזכורת

• זיהוי משולש ישר-זווית באמצעות משפט פיתגורס

משפט: משולש, שבו ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי הצלעות האחרות, הוא משולש ישר-זווית.

כלומר: אם במשולש מתקיים $a^2 + b^2 = c^2$,

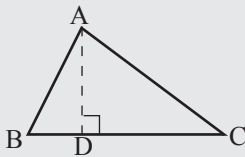
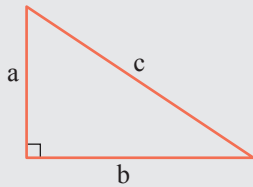
אזי הזווית מול הצלע הארוכה (c) היא 90° .

• גובה במשולש (לצלע נתונה):

קטע היוצא מקדקוד משולש ומאונך לצלע שממול (או להמשכה).

AD הוא גובה לצלע BC במשולש $\triangle ABC$.

הסימון: $AD \perp BC$ או $\angle ADC = 90^\circ$.



דוגמה פתורה – משולש שאחת מצלעותיו מאונכת לאחד הצירים

בסרטוט שלפניכם משולש $\triangle ABC$.

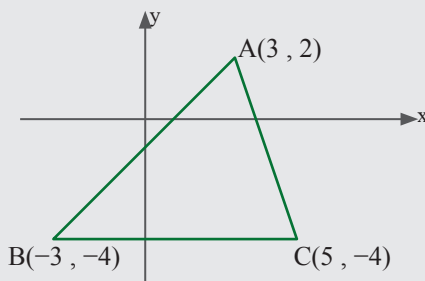
א. מצאו את אורכי הצלעות של המשולש.

ב. מצאו את היקף המשולש $\triangle ABC$.

ג. מצאו את אורך הגובה לצלע BC.

ד. מצאו את שטח המשולש $\triangle ABC$.

ה. בדקו בעזרת משפט פיתגורס אם $\angle BCA = 90^\circ$.



א. הצלע BC ניצבת לציר ה-y (מקבילה לציר ה-x). לכן נחשב את אורכה על פי הפרש שיעורי ה-x של הנקודות

$$d_{BC} = 5 - (-3) = 8 \text{ יחידות} \quad \text{C ו- B}$$

שתי הצלעות האחרות אינן ניצבות לצירים, ולכן נחשב את אורכיהן לפי הנוסחה שלמדנו.

צלע AC : $C(5, -4), A(3, 2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2)^2 + (-6)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{4+36}$$

$$d_{AC} = \sqrt{40}$$

$$d_{AC} = 6.32 \text{ יחידות}$$

צלע AB : $B(-3, -4), A(3, 2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-4-2)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{36+36}$$

$$d_{AB} = \sqrt{72}$$

$$d_{AB} = 8.49 \text{ יחידות}$$

תשובה: אורכי צלעות המשולש הם: $BC = 8$ יח', $AB = 8.49$ יח', $AC = 6.32$ יח'.

ב. לחישוב היקף המשולש נחבר את אורכי הצלעות: $6.32 + 8.49 + 8 = 22.81$ יח'.

תשובה: היקף המשולש הוא 22.81 יח'.

ג. הצלע BC ניצבת לציר ה-y, ולכן הגובה אליה יהיה ניצב לציר ה-x.

נסרטט גובה מנקודה A לצלע BC,

ונסמן ב-D את נקודת המפגש שלו עם הצלע BC.

$x_D = x_A = 3$ ו- $y_D = y_B = y_C = -4$, ולכן $D(3, -4)$.

נחשב את אורך AD על פי הפרש שיעורי ה-y של נקודות

$$d_{AD} = 2 - (-4) = 6 \text{ יחידות} \quad \text{D ו- A}$$

תשובה: אורך הגובה לצלע BC הוא 6 יח'.

ד. נחשב את שטח המשולש ΔABC לפי הנוסחה: $S = \frac{\text{צלע} \cdot \text{גובה לאותה צלע}}{2}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{8 \cdot 6}{2} \Rightarrow \boxed{S_{\Delta ABC} = 24 \text{ יח}^2}$$

תשובה: שטח המשולש ΔABC הוא 24 יח"ר (יחידות ריבועיות, או יח"ש - יחידות שטח).

ה. ניעזר במשפט פיתגורס ונבדוק אם מתקיים במשולש:

ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי הצלעות האחרות.

מצאנו את אורכי הצלעות בסעיף א':

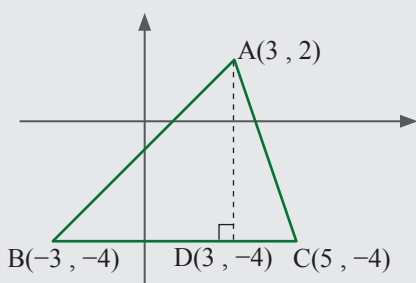
$BC = 8$ יח', $AB = 8.49$ יח', $AC = 6.32$ יח'. AB היא הצלע הארוכה.

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \quad \text{נבדוק אם מתקיים השוויון:}$$

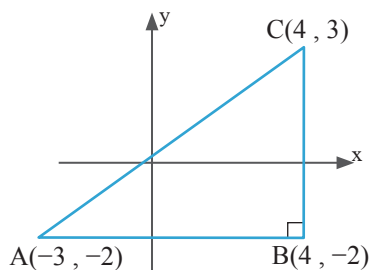
$$8^2 + 6.32^2 \stackrel{?}{=} 8.49^2$$

$$64 + 39.94 \neq 72.08$$

תשובה: המשולש ΔABC אינו ישר-זווית.



כאשר מתבקשים למצוא שטח משולש, חשוב לבדוק תחילה אם אחת הצלעות ניצבת לאחד הצירים. אם יש צלע הניצבת לציר, אזי הגובה לצלע זו (או להמשכה) יהיה ניצב לציר השני. בהמשך נראה כיצד ניתן לחשב שטח משולש, כשאין בו צלע הניצבת לאחד הצירים.



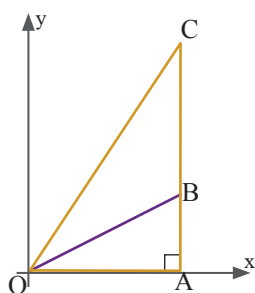
18. קדקודיו של משולש ישר-זווית $\triangle ABC$ הם:

$C(4, 3), B(4, -2), A(-3, -2)$

א. מצאו את אורך הניצב AB.

ב. מצאו את אורך הניצב BC.

ג. מצאו את שטח המשולש $\triangle ABC$.



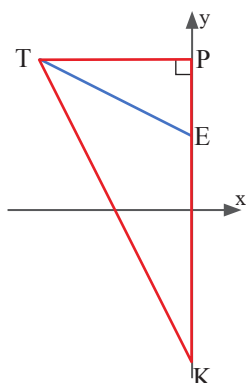
19. נתונות 4 נקודות במישור:

$C(4, 6), B(4, 2), A(4, 0), O(0, 0)$

א. מצאו את שטח המשולש $\triangle ABO$.

ב. מצאו את שטח המשולש $\triangle ACO$.

ג. מצאו את אורך הקטע BC.



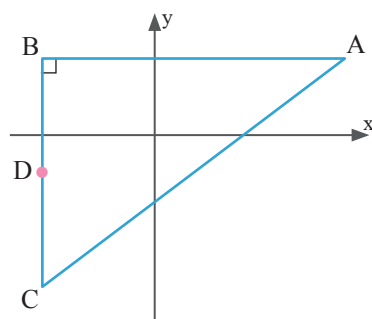
20. נתונות ארבע נקודות במישור:

$P(0, 4), E(0, 2), K(0, -4), T(-4, 4)$

א. מצאו את שטח המשולש $\triangle TEP$.

ב. מצאו את שטח המשולש $\triangle TKP$.

ג. מצאו את שטח המשולש $\triangle TKE$.



21. הנקודות $C(-3, -4), B(-3, 2), A(5, 2)$

הן שלושה קדקודים של משולש $\triangle ABC$.

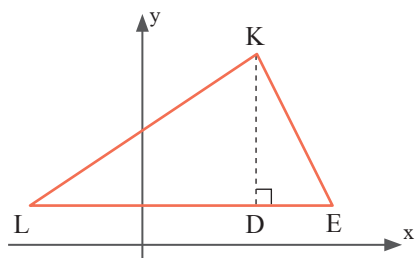
א. מצאו את שטח המשולש $\triangle ABC$.

הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה D.

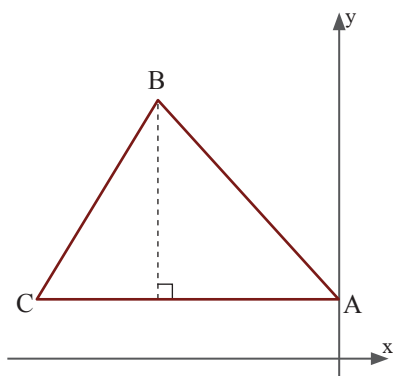
ג. מצאו את שטח המשולש $\triangle ABD$.

ד. מצאו את שטח המשולש $\triangle ACD$.



22. קדקודיו של משולש $\triangle LEK$ הם: $L(-3, 1)$, $E(5, 1)$, $K(3, 5)$.

- מצאו את אורך הצלע LE .
- מצאו את אורך הגובה KD .
- מצאו את שטח המשולש $\triangle LEK$.
- מצאו את היקף המשולש $\triangle LEK$.

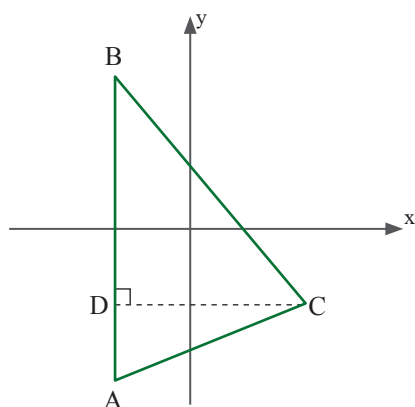


23. שני קדקודיו של משולש $\triangle ABC$ הם: $C(-10, 2)$, $B(-6, 8)$.

הקדקוד A נמצא על חלקו החיובי של ציר ה- y

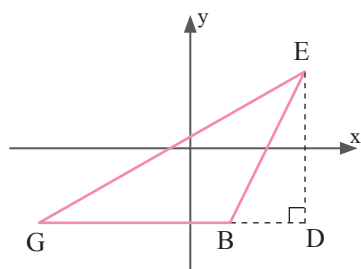
במרחק של 2 יחידות מראשית הצירים.

- מצאו את אורך הצלע AC .
- מצאו את אורכי הצלעות AB ו- BC .
- מצאו את היקף המשולש $\triangle ABC$.
- (1) מצאו את אורך הגובה לצלע AC .
(2) מצאו את שטח המשולש $\triangle ABC$.



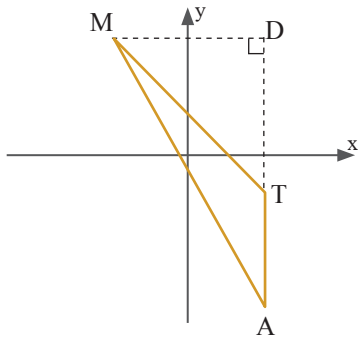
24. קדקודיו של משולש $\triangle ABC$ הם: $C(3, -2)$, $B(-2, 4)$, $A(-2, -4)$.

- מצאו את אורך הצלע AB .
- מצאו את אורך הגובה CD .
- מצאו את שטח המשולש $\triangle ABC$.
- מצאו את היקף המשולש $\triangle ABC$.
- בדקו בעזרת משפט פיתגורס אם המשולש $\triangle ABC$ הוא ישר-זווית.



25. קדקודיו של משולש קהה-זווית $\triangle GBE$ הם:

- $G(-4, -2)$, $B(1, -2)$, $E(3, 2)$
- מצאו את אורך הצלע GB .
- מצאו את אורך הגובה ED .
- מצאו את שטח המשולש $\triangle GBE$.
- מצאו את היקף המשולש $\triangle GBE$.



26. קדקודיו של משולש קהה-זווית $\triangle ATM$ הם :

.A(2, -4), T(2, -1), M(-2, 3)

א. מצאו את אורך הצלע AT.

ב. מצאו את אורך הגובה MD.

ג. מצאו את שטח המשולש $\triangle ATM$.

ד. מצאו את שטח המשולש $\triangle TMD$.

27. נתון משולש שקדקודיו הם : C(10, 3), B(-2, 3), A(-2, -2).

א. סמנו את הנקודות במערכת צירים, וסרטטו את המשולש $\triangle ABC$.

ב. מצאו את אורכי צלעותיו של המשולש $\triangle ABC$.

ג. מצאו את היקף המשולש $\triangle ABC$.

ד. מצאו את שטח המשולש $\triangle ABC$.

28. הנקודות A(3, -1), B(-2, -1), C(-2, -5) הן שלושה קדקודים של משולש $\triangle ABC$.

א. סמנו את הנקודות במערכת צירים, סרטטו את המשולש ומצאו את שטחו.

ב. הנקודה D היא אמצע הצלע BC. מצאו את שיעורי הנקודה D.

ג. מצאו את שטח המשולש $\triangle ABD$.

ד. מצאו את שטח המשולש $\triangle ACD$.

29. הצלע AB של משולש מונחת על ציר x, ואורכה 7 יחידות. הקדקוד השלישי נמצא בנקודה C(6, 4).

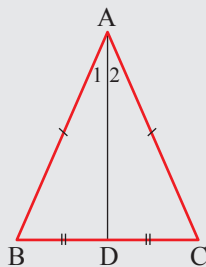
א. מצאו את שטח המשולש $\triangle ABC$.

ב. ידוע שהנקודה D מונחת על אמצע הצלע AB. מצאו את שטח המשולש $\triangle ACD$.

ג. ידוע שהנקודה E מונחת על אמצע הצלע AC. מצאו את שטח המשולש $\triangle ABE$.

ד. מצאו את שטח המשולש $\triangle BCE$.

תזכורת



• **תיכון במשולש** – קטע, המחבר קדקוד של משולש עם אמצע הצלע שמולו.

אם במשולש $\triangle ABC$ הקטע AD הוא תיכון לצלע BC, אזי מתקיים : $BD = DC$.
שימו לב! הנקודה D היא אמצע הקטע BC.

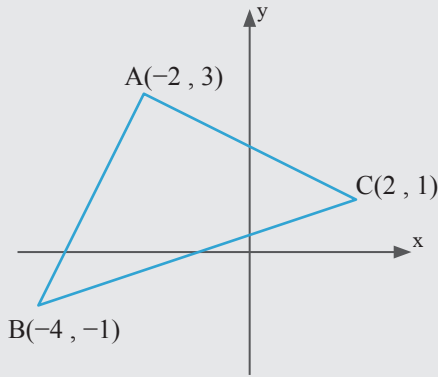
• **משפט**: במשולש שווה שוקיים התיכון לבסיס, הגובה לבסיס

וחוצה זווית הראש מתלכדים.

אם $AC = AB$, אזי מתקיים : $AD \perp BC$, $DC = BD$, $\angle A_1 = \angle A_2$.

הערה: ביחידה זו נתייחס רק לגובה במשולש ולתיכון במשולש, אך לא לחוצה הזווית.

דוגמה פתורה – משולש שווה-שוקיים



בסרטוט שלפניכם משולש ΔABC , שקדקודיו הם:

$$C(2, 1), B(-4, -1), A(-2, 3)$$

א. מצאו את אורכי הצלעות של המשולש ΔABC .

ב. הסבירו מדוע המשולש ΔABC הוא שווה-שוקיים.

ג. מצאו את שיעורי נקודת האמצע של בסיס המשולש ΔABC .

ד. מצאו את שטח המשולש ΔABC .

פתרון:

א. אף לא אחת מצלעות המשולש ΔABC ניצבת לציר ה- x או לציר ה- y .

נמצא את אורכי הצלעות לפי הנוסחה: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

צלע BC : $B(-4, -1), C(2, 1)$

$$d_{BC} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-1 - 1)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{40}$$

צלע AC : $C(2, 1), A(-2, 3)$

$$d_{AC} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 3)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{20}$$

צלע AB : $B(-4, -1), A(-2, 3)$

$$d_{AB} = \sqrt{(-4 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{20}$$

תשובה: אורכי צלעות המשולש הם: $BC = \sqrt{40}$ יח', $AB = \sqrt{20}$ יח', $AC = \sqrt{20}$ יח'.

ב. המשולש ΔABC הוא שווה-שוקיים, כי יש בו שתי צלעות השוות באורכן: $AB = AC = \sqrt{20}$ יח'.

ג. בסיס המשולש ΔABC הוא הצלע BC . קצות הצלע בנקודות: $B(-4, -1), C(2, 1)$.

נמצא את שיעורי נקודת האמצע M של הקטע BC .

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$$

$$x_M = \frac{-4 + 2}{2}$$

$$x_M = -1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$$

$$y_M = \frac{-1 + 1}{2}$$

$$y_M = 0$$

תשובה: נקודת האמצע של הצלע BC היא: $M(-1, 0)$.

ד. דרך א' – חישוב באמצעות מציאת אורך הגובה לבסיס

במשולש שווה-שוקיים התיכון לבסיס AM הוא גם הגובה לבסיס. לכן אם נחשב את אורכו, נוכל למצוא

את שטח המשולש ΔABC .

נמצא את אורך הגובה AM, שקצותיו בנקודות: $A(-2, 3), M(-1, 0)$.

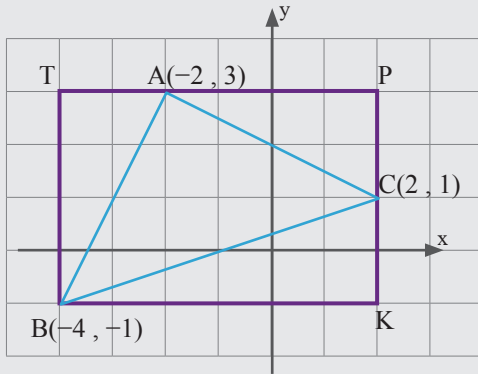
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AM} = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (3 - 0)^2}$$

$$d_{AM} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10} \text{ יח'}$$

נחשב את שטח המשולש לפי הנוסחה: $S = \frac{\text{צלע} \cdot \text{גובה לאותה צלע}}{2}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AM}{2} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ יח"ר}$$



דרך ב' – חיסור שטחים

את שטח המשולש ΔABC ניתן למצוא על ידי חיסור שטחי משולשים ישרי-זווית ממלבן, שצלעותיו מקבילות לצירים וקדקודי המשולש מונחים עליהם, כמתואר בסרטוט.

שיעורי קדקודי המלבן BTPK הם:

$B(-4, -1), T(-4, 3), P(2, 3), K(2, -1)$

לכן אורכי צלעות המלבן הם:

$$TP = BK = 2 - (-4) = 6 \text{ יח'}, TB = PK = 3 - (-1) = 4 \text{ יח'}$$

נחסר את שטחי המשולשים ישרי-הזווית משטח המלבן:

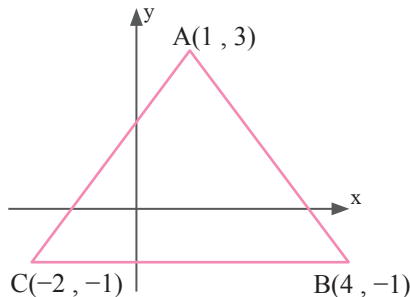
$$S_{\Delta ABC} = S_{BTPK} - S_{\Delta ABT} - S_{\Delta APC} - S_{\Delta BKC}$$

$$S_{\Delta ABC} = 6 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 2}{2} = 24 - 4 - 4 - 6 = 10 \text{ יח"ר}$$

תשובה: שטח המשולש ΔABC הוא 10 יח"ר.

שימו לב!

אם אורך הצלע מספר לא שלם, ניתן להשאיר את אורכי הצלעות עם סימן השורש.



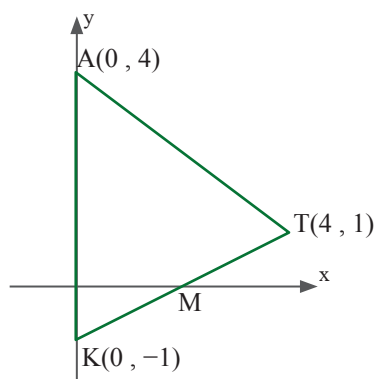
30. בסרטוט שלפניכם משולש ΔABC .

א. מצאו את אורכי הצלעות של המשולש ΔABC .

ב. הסבירו מדוע המשולש ΔABC הוא שווה-שוקיים.

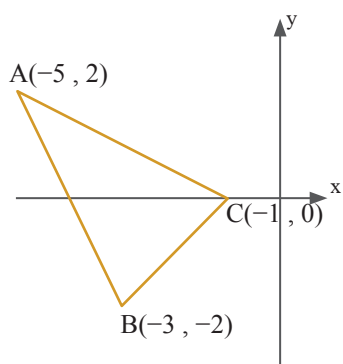
ג. מצאו את שיעורי נקודת האמצע של בסיס המשולש ΔABC .

ד. מצאו את שטח המשולש ΔABC .



31. בסרטוט שלפניכם משולש ΔATK .

- מצאו את אורכי הצלעות של המשולש ΔATK .
- מצאו את היקף המשולש ΔATK .
- הוכיחו שהמשולש ΔATK הוא שווה-שוקיים.
- מצאו את שטח המשולש ΔATK .
- הנקודה M היא אמצע הצלע TK.
- מצאו את שטח המשולש ΔMAT .



32. בסרטוט שלפניכם משולש ΔABC .

- מצאו את אורכי הצלעות של המשולש ΔABC .
- הסבירו מדוע המשולש ΔABC הוא שווה-שוקיים.
- מצאו את שיעורי נקודה M, שהיא אמצע הבסיס של המשולש ΔABC .
- (1) מצאו את אורך הגובה לבסיס המשולש ΔABC .
(2) מצאו את שטח המשולש ΔABC .
- מצאו את שטח המשולש ΔABM .

33. נתון משולש שקדקודיו הם: $A(-4, 1)$, $B(1, 3)$, $C(6, 1)$.

- מצאו את אורכי צלעותיו של המשולש ΔABC .
- הסבירו מדוע המשולש ΔABC הוא שווה-שוקיים.
- (1) מצאו את שיעורי נקודה M, שהיא אמצע בסיס המשולש ΔABC .
(2) מצאו את שטח המשולש ΔABC .

34. נתון משולש ΔABC , שקדקודיו הם: $A(8, -1)$, $B(9, 6)$, $C(14, 1)$.

- הוכיחו שהמשולש ΔABC הוא שווה-שוקיים.
- מצאו את היקף המשולש ΔABC .
- הנקודה M היא אמצע בסיס המשולש ΔABC .
- מצאו את שטח המשולש ΔABM .

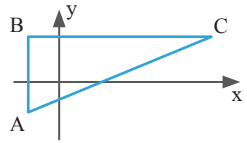
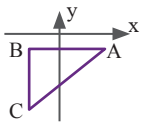
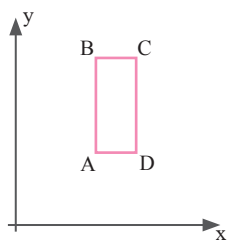
תשובות – גיאומטריה אנליטית

משימת פתיחה

- א) $E(4, 3), C(1, -1), B(1, 1), A(1, 3)$
 ב) (1) לשלוש הנקודות יש אותו שיעור x .
 (2) הישר מקביל לציר ה- y .
 ג) (1) יש להן אותו שיעור y .
 (2) הישר מקביל לציר ה- x .
 ד) הנקודה B נמצאת באמצע הקטע AC , ומרוחקת 2 יח' מכל אחת מהנקודות A ו- C .

קטעים במערכת צירים

1. א) $y_A = y_B = 6$, ולכן הקטע AB מקביל לציר ה- x וניצב לציר ה- y .
 ב) $x_B = x_C = 8$, ולכן הקטע BC מקביל לציר ה- y וניצב לציר ה- x .
 ג) $AB = 4$ יח', $BC = 5$ יח'.
2. א) $y_B = y_D = -2$, ולכן הקטע BD מקביל לציר ה- x וניצב לציר ה- y .
 ב) $x_D = x_C = -7$, ולכן הקטע AC מקביל לציר ה- y וניצב לציר ה- x .
 ג) $DB = 3$ יח', $DC = 7$ יח'.
3. $KL = 5$ יח', $AB = 18$ יח', $CD = 14$ יח'.
4. $KN = 4$ יח', $LT = 9$ יח', $CD = 8$ יח'.
5. א) $B(4, 3), AB = 8$ יח', $BC = 8$ יח'.
 ב) $B(5, -7), AB = 9$ יח', $BC = 8$ יח'.
 ג) $B(-7, 6), AB = 10$ יח', $BC = 11$ יח'.
6. $A(5, 1), B(2, 4), C(2, -2), D(-1, 1)$ 7. 5 יח'.
8. א) 17 יח' ב) 5 יח' ג) 10 יח' ד) 13 יח' ה) $\sqrt{40} \approx 6.32$ יח' ו) $\sqrt{10} \approx 3.16$ יח'.
9. א' 7, ב' 10, ג' 10, ד' 11, ה' 5.
12. א) $(4, 7)$ ב) $(3.5, 1.5)$ ג) $(-2.5, 1)$ ד) $(0, 3.5)$ ה) $(-4, -1)$ ו) $(0.5, -0.5)$.
13. א) 20 יח' ב) $T(-2, -2)$ ג) $d_{PT} = d_{TK} = 10$ יח'.
14. $(9, 2)$.
15. א) $(6, 9)$ ב) $(5, 1)$ ג) $(5, 2)$ ד) $(0, 2)$ ה) $(10, -13)$ ו) $(0, -10)$.
16. א) $K(0, -4), T(6, 0)$ ב) $\sqrt{52} \approx 7.21$ יח'.
17. א) $A(0, 8)$ ב) $C(-4, 0)$ ג) $(-2, 4)$ ד) $B(4, 0)$ ה) $AC = AB = \sqrt{80} \approx 8.94$ יח'.
18. א) 7 יח' ב) 5 יח' ג) 17.5 יח'.
19. א) 4 יח' ב) 12 יח' ג) 4 יח'.
20. א) 4 יח' ב) 16 יח' ג) 12 יח'.

21. א) 24 יח"ר (ב) $(-3, -1)$ ג) 12 יח"ר ד) 12 יח"ר
22. א) 8 יח"ר (ב) 4 יח"ר ג) 16 יח"ר ד) 19.68 יח"ר
23. א) 10 יח"ר (ב) $8.49 \approx \sqrt{72}$ יח"ר, $7.21 \approx \sqrt{52}$ יח"ר, $BC =$ ג) 25.7 יח"ר (ד) (1) 6 יח"ר (2) 30 יח"ר
24. א) 8 יח"ר (ב) 5 יח"ר ג) 20 יח"ר ד) 21.2 יח"ר
(ה) $8^2 \neq (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{61})^2$, ולכן המשולש לא ישר-זווית.
25. א) 5 יח"ר (ב) 4 יח"ר ג) 10 יח"ר ד) 17.53 יח"ר
26. א) 3 יח"ר (ב) 4 יח"ר ג) 6 יח"ר ד) 8 יח"ר
27. א) 
28. א) 
השטח = 10 יח"ר
29. א) 14 יח"ר (ב) 7 יח"ר ג) 7 יח"ר ד) 7 יח"ר
30. א) 5 יח"ר $d_{AB} = d_{AC} = 5$, $d_{BC} = 6$ יח"ר
(ב) במשולש יש שתי צלעות השוות באורכן.
ג) $(1, -1)$ ד) 12 יח"ר
31. א) 5 יח"ר $d_{AT} = d_{AK} = 5$, $4.47 \approx \sqrt{20}$ יח"ר, $d_{KT} =$ (ב) 14.47 יח"ר
(ג) במשולש יש שתי צלעות השוות באורכן. ד) 10 יח"ר (ה) 5 יח"ר
32. א) $\sqrt{20}$ יח"ר $d_{AB} = d_{AC} = \sqrt{20}$, $d_{BC} = \sqrt{8}$ יח"ר (ב) במשולש יש שתי צלעות השוות באורכן.
(ג) $(-2, -1)$ ד) (1) $\sqrt{18}$ יח"ר (2) 6 יח"ר (ה) 3 יח"ר
33. א) 10 יח"ר $d_{AC} = 10$, $d_{AB} = d_{BC} = \sqrt{29}$ יח"ר (ב) במשולש יש שתי צלעות השוות באורכן.
(ג) (1) $(1, 1)$ (2) 10 יח"ר
34. א) $\sqrt{50}$ יח"ר $d_{AB} = d_{BC} = \sqrt{50}$, ולכן המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה-שוקיים.
(ב) 20.47 יח"ר ג) 20 יח"ר
35. א) 7 יח"ר (ב) 5 יח"ר ג) 35 יח"ר ד) 24 יח"ר
36. א) 
37. א) 48 יח"ר (ב) $M(4, 3)$ ג) 12 יח"ר